On considère la suite (I_n) définie par $I_0 = \int_0^1 \sqrt{1-x}\,dx$ et $I_n = \int_0^1 x^n\sqrt{1-x}\,dx$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2 Montrer, a l'aide d'une intégration par parties, que $I_1 = \frac{2}{5}I_0$.

$$I_1 = \int_0^1 x\sqrt{1-x}\,dx$$

on pose

$$U(x) = x \longrightarrow U'(x) = 1$$

$$v'(x) = \sqrt{1-x} \longrightarrow v(x) = -\frac{2}{3}(1-x)\sqrt{1-x}$$

$$I_1 = \left[-\frac{2}{3}x(1-x)\cdot\sqrt{1-x}\right]_0^1 + \frac{2}{3}\int_0^1 (1-x)\sqrt{1-x}\,dx$$

$$= 0 + \frac{2}{3}\int_0^1 (1-x)\sqrt{1-x}\,dx$$

$$I_1 = \frac{2}{3}\underbrace{\int_0^1 \sqrt{1-x}\,dx}_{I_0} - \frac{2}{3}\underbrace{\int_0^1 x\cdot\sqrt{1-x}\,dx}_{I_1}$$

$$I_1 = \frac{2}{3}I_0 - \frac{2}{3}I_1$$

$$\Leftrightarrow I_1 + \frac{2}{3}I_1 = \frac{2}{3}I_0$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{3}I_1 = \frac{2}{3}I_0$$

Donc

$$\boxed{I_1 = \frac{2}{5}I_0}$$